

В.Н. СИМБИРКИН, канд. техн. наук, В.В. МАТКОВСКИЙ, инж.
ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, ЕВРОСОФТ, г. Москва

К РАСЧЕТУ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПО НОРМАЛЬНЫМ СЕЧЕНИЯМ

Представлены методики расчета напряженно-деформированного состояния, прочности и трещиностойкости элементов железобетонных конструкций по нормальным сечениям. Выполнен сопоставительный анализ результатов расчета различными методами для сечений различной геометрической формы с различным продольным армированием при различном виде и уровне напряженного состояния. Даны рекомендации по выбору метода расчета и формы диаграммы деформирования бетона, используемых при анализе сечений.

Ключевые слова: железобетонные элементы, нормальные сечения, численный расчет, метод предельных усилий, деформационная модель, диаграммы деформирования бетона и арматурной стали.

1. Введение

При расчете элементов железобетонных конструкций на прочность по сечениям, нормальным к продольной оси, применяют два метода. Один из них – упрощенный метод предельных усилий, представленный как в СНиП 2.03.01-84* [1], так и в более поздних СНиП 52-01-2003 [2] нормах проектирования железобетонных конструкций. Согласно методу предельных усилий, прочность элемента считается обеспеченной, если действующие в его сечениях усилия не превышают предельных значений, определяемых из предположения о равномерном распределении нормальных напряжений, равных расчетному сопротивлению бетона, по условной сжатой зоне бетона; растянутый бетон из работы сечения, как правило, исключается. Метод является простым и надежным средством анализа при простых геометрических формах сечения и усложняется при сложной конфигурации сечения и при косом изгибе. Метод предельных усилий широко используется в проектной практике многие годы.

В последние годы также стали применять второй метод – общий метод анализа напряженно-деформированного состояния поперечных сечений элементов [3], который известен в русскоязычной литературе под названием «деформационная модель» сечения и включен в Еврокоды, строительные нормы и своды правил России, нормы Беларуси и других стран. Этот метод основан на использовании диаграмм деформирования, аппроксимирующих нелинейную работу бетона и арматуры, и некоторого закона распределения относительных деформаций по площади поперечных сечений элементов; здесь применяется гипотеза плоских сечений или ее модификация для средних деформаций. В качестве диаграмм деформирования материалов могут быть использованы зависимости «напряжения - относительные деформации» произвольного вида (кусочно-линейные, криволинейные, немонотонные и негладкие), построенные с учетом вида напряженного состояния и режима нагружения. В отличие от метода предельных усилий, общий метод расчета позволяет выполнять анализ сечений не только в предельном, но и в допредельном и запредельном состояниях.

Однако применение для расчета сечений «деформационной модели» требует итерационного поиска решения нелинейной системы уравнений, что затрудняет процесс вычислений. Кроме того, такой подход не всегда может привести к истинному решению задачи вследствие проблемы организации сходящегося итерационного процесса и возможной неединственности решения [4]. В то же время СП 52-101-2003 [5] рекомендует использовать «деформационную модель» во всех случаях, допуская, в отличие от СНиП 2.03.01-84* [1], применение метода предельных усилий лишь для «железобетонных элементов прямоугольного, таврового и двутаврового сечений с арматурой, расположенной у перпендикулярных плоскости изгиба граней элемента, при действии усилий в плоскости симметрии нормальных сечений» (п. 6.2.2 [5]). На практике данное указание зачастую не выполняется.

В настоящей работе представлены численные методы решения нелинейной задачи расчета нормальных сечений железобетонных конструкций. Кроме того, выполнены численные исследования, цель которых – найти допустимую область применения метода предельных усилий, а также диаграмм деформирования бетона различных форм, используемых на практике.

2. Определяющие соотношения общего метода расчета сечений

Напряженно-деформированное состояние поперечного сечения стержневого железобетонного элемента (рис. 1) при действии усилий растяжения-сжатия и изгиба в двух плоскостях с учетом гипотезы плоских сечений (или модификации этой гипотезы для средних деформаций), представляется системой трех нелинейных уравнений:

$$\begin{bmatrix} \varpi & 0 & 0 \\ 0 & B_y & B_{yz} \\ 0 & B_{yz} & B_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_o \\ \psi_y \\ \psi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \text{ или } B(q)q = S, \quad (1)$$

где $B(q)$ – матрица жесткости сечения, элементы которой выражаются формулами:

$$\varpi = \int_{A_b} \frac{\sigma_b}{\varepsilon} dA_b + \int_{A_s} \frac{\sigma_s}{\varepsilon} dA_s; \quad (2)$$

$$B_y = \int_{A_b} \frac{\sigma_b}{\varepsilon} (z - z_o)^2 dA_b + \int_{A_s} \frac{\sigma_s}{\varepsilon} (z - z_o)^2 dA_s; \quad (3)$$

$$B_z = \int_{A_b} \frac{\sigma_b}{\varepsilon} (y - y_o)^2 dA_b + \int_{A_s} \frac{\sigma_s}{\varepsilon} (y - y_o)^2 dA_s; \quad (4)$$

$$B_{yz} = \int_{A_b} \frac{\sigma_b}{\varepsilon} (y - y_o)(z - z_o) dA_b + \int_{A_s} \frac{\sigma_s}{\varepsilon} (y - y_o)(z - z_o) dA_s; \quad (5)$$

$q = (\varepsilon_o, \psi_y, \psi_z)$ – вектор деформаций, включающий значения осевой относительной деформации ε_o (в центре жесткости сечения O , см. рис. 1) и кривизн ψ_y, ψ_z относительно соответствующих осей;

$S = (N, M_y, M_z)$ – вектор действующих в сечении внутренних сил;

y_o, z_o – координаты точки O (центра жесткости),

$$y_o = \frac{\int_{A_b} \frac{\sigma_b}{\varepsilon} y dA_b + \int_{A_s} \frac{\sigma_s}{\varepsilon} y dA_s}{\int_{A_b} \frac{\sigma_b}{\varepsilon} dA_b + \int_{A_s} \frac{\sigma_s}{\varepsilon} dA_s}, \quad z_o = \frac{\int_{A_b} \frac{\sigma_b}{\varepsilon} z dA_b + \int_{A_s} \frac{\sigma_s}{\varepsilon} z dA_s}{\int_{A_b} \frac{\sigma_b}{\varepsilon} dA_b + \int_{A_s} \frac{\sigma_s}{\varepsilon} dA_s}; \quad (6), (7)$$

σ_b, σ_s – нормальные напряжения, действующие по направлению оси X ;

Y, Z – произвольно выбранные ортогональные оси;

A_b, A_s – площадь поперечного сечения;

нижние индексы b и s относятся соответственно к бетону и арматуре.

Учет влияния сдвига и кручения показан в работах [4, 6].

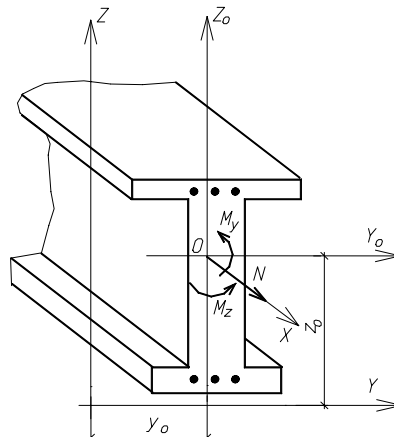


Рис. 1. Поперечное сечение стержневого железобетонного элемента и действующие внутренние силы

Относительные деформации ε по направлению оси стержня X в точке поперечного сечения с координатами (y, z) определяем в соответствии с гипотезой плоских сечений:

$$\varepsilon = \varepsilon_o - \psi_y(z - z_o) - \psi_z(y - y_o), \quad (8)$$

а величины нормальных напряжений находим по принятым зависимостям

$$\sigma_b = f_b(\varepsilon), \quad \sigma_s = f_s(\varepsilon), \quad (9)$$

которые могут иметь любой вид и моделировать работу материалов как при кратковременном, так и при длительном нагружении.

Принимаем, что если при заданных усилиях существует хотя бы одно решение системы (1), то прочность поперечного сечения обеспечена.

3. Диаграммы деформирования материалов

Сводом правил [5] в качестве функций (9), используемых при расчете нормальных сечений по нелинейной деформационной модели, установлены билинейная (рис. 2, а) и трехлинейная (рис. 2, б) диаграммы для бетона, а также диаграмма Прандтля (рис. 2, г) для арматурной стали. Параметры диаграмм назначаются в зависимости от класса бетона и арматуры и длительности нагружения. В данной работе, кроме того, использована криволинейная (рис. 2, в) диаграмма деформирования бетона, которая представляет собой функцию из [7], область растяжения которой модифицирована по предложению [8] с учетом работы растянутого бетона между трещинами, эффектов проскальзывания арматуры и усадки бетона.

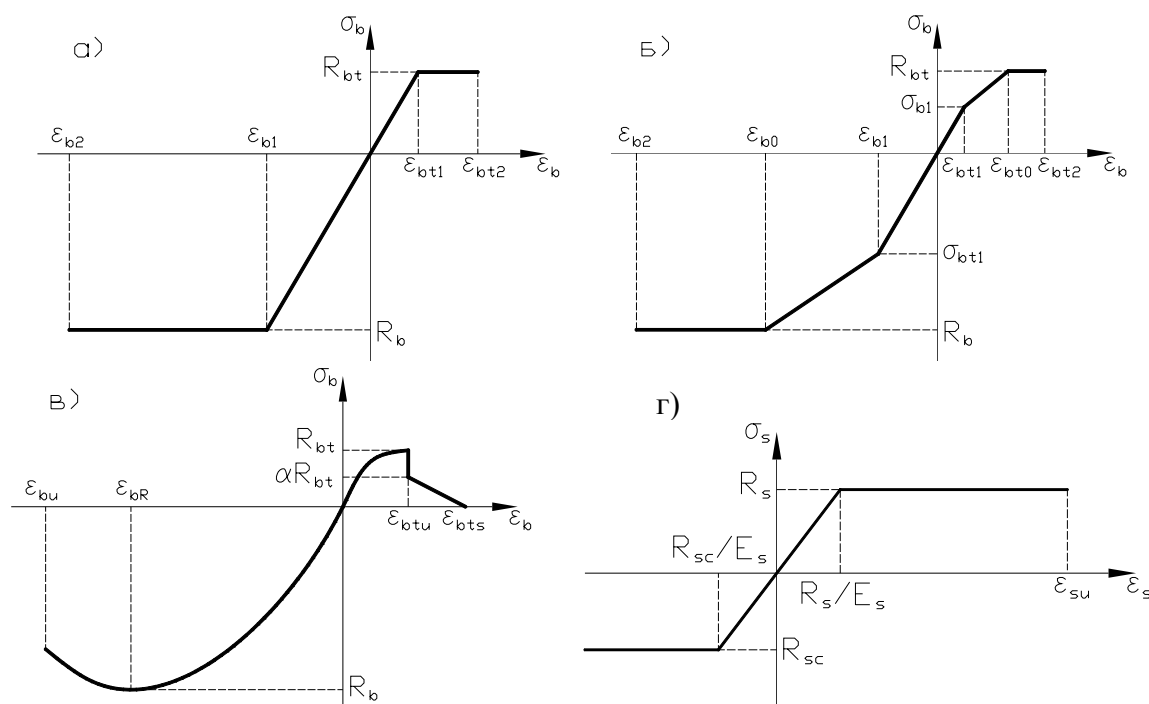


Рис. 2. Диаграммы одноосного растяжения/сжатия бетона (а – билинейная, б – трехлинейная, в – криволинейная) и арматурной стали (г)

4. Методы решения задачи

Наиболее распространенными методами решения нелинейных задач строительной механики являются вариационные методы, а также методы, в которых решение исходной задачи сводится к последовательности решений линейно-упругих задач [9].

Для решения нелинейной системы уравнений (1) может быть использован метод переменных параметров упругости. Предварительно рассматриваемое сечение разбиваем на малые конечные элементы, в пределах которых линейную деформацию считаем постоянной. В качестве переменных параметров упругости примем фиктивные (секущие) модули упругости бетона $E_{b,i}^*$ и стали $E_{s,j}^*$. Здесь и далее индексы i и j пробегает значения $i = 1 \div n_b$ и $j = 1 \div n_s$, где n_b и n_s – число конечных элементов на площади бетонной и арматурной части сечения соответственно.

Учитывая, что секущие модули деформации выражаются формулами

$$E_{b,i}^* = \frac{\sigma_{b,i}}{\varepsilon_{b,i}}, \quad E_{s,j}^* = \frac{\sigma_{s,j}}{\varepsilon_{s,j}}, \quad (10)$$

соотношения (2)-(7) переписем в следующем виде:

$$\varpi = \sum_{j=1}^{n_b} E_{b,j}^* A_{b,j} + \sum_{j=1}^{n_s} E_{s,j}^* A_{s,j}; \quad (2^*)$$

$$B_y = \sum_{j=1}^{n_b} E_{b,j}^* (z_{b,i} - z_o)^2 A_{b,j} + \sum_{j=1}^{n_s} E_{s,j}^* (z_{s,i} - z_o)^2 A_{s,j}; \quad (3^*)$$

$$B_z = \sum_{j=1}^{n_b} E_{b,j}^* (y_{b,i} - y_o)^2 A_{b,j} + \sum_{j=1}^{n_s} E_{s,j}^* (y_{s,i} - y_o)^2 A_{s,j}; \quad (4^*)$$

$$B_{yz} = \sum_{j=1}^{n_b} E_{b,j}^* (y_{b,i} - y_o)(z_{b,i} - z_o) A_{b,j} + \sum_{j=1}^{n_s} E_{s,j}^* (y_{s,i} - y_o)(z_{s,i} - z_o) A_{s,j}; \quad (5^*)$$

$$y_o = \frac{\sum_{j=1}^{n_b} E_{b,j}^* y_{b,j} A_{b,j} + \sum_{j=1}^{n_s} E_{s,j}^* y_{s,j} A_{s,j}}{\varpi}; \quad (6^*)$$

$$z_o = \frac{\sum_{j=1}^{n_b} E_{b,j}^* z_{b,j} A_{b,j} + \sum_{j=1}^{n_s} E_{s,j}^* z_{s,j} A_{s,j}}{\varpi}. \quad (7^*)$$

На первом шаге расчета значения фиктивных модулей упругости $E_{b,i}^*$ и $E_{s,j}^*$ принимаем равными их начальным значениям. Далее, решая систему (1), получаем вектор деформаций. Из соотношений (8) определяем деформации в каждой конечной площадке сечения бетона и сечениях арматурных стержней. Затем получаем новые значения параметров упругости по формулам:

$$E_{b,i}^* = \frac{f_b(\varepsilon_{b,i})}{\varepsilon_{b,i}}, \quad E_{s,i}^* = \frac{f_s(\varepsilon_{s,i})}{\varepsilon_{s,i}}. \quad (11)$$

Процедура повторяется до тех пор, пока выполняются неравенства:

$$\left| \frac{\varepsilon_{0,k} - \varepsilon_{0,k-1}}{\varepsilon_{0,k}} \right| \geq t_1; \quad \left| \frac{\psi_{y,k} - \psi_{y,k-1}}{\psi_{y,k}} \right| \geq t_2; \quad \left| \frac{\psi_{z,k} - \psi_{z,k-1}}{\psi_{z,k}} \right| \geq t_3. \quad (12)$$

Здесь k – порядковый номер итерации; t_1, t_2, t_3 – малые параметры точности решения.

В случае резкого возрастания левых частей неравенств (12) поиск решения прекращается ввиду превышения предельных для сечения усилий.

Графическая иллюстрация метода дана на рис. 3.

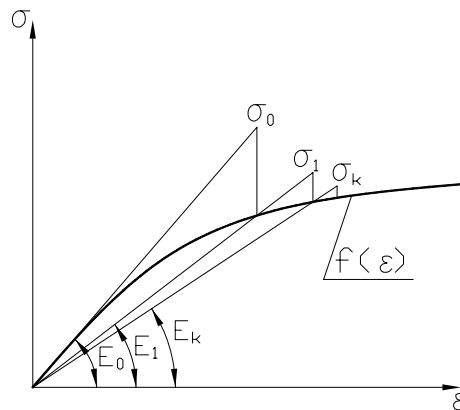


Рис. 3. Схема решения нелинейных задач методом переменных параметров упругости (0, 1, ..., k – номера итераций)

Метод обеспечивает сходимость решения при малых деформациях, в пределах которых функции (9) монотонно возрастают. Иначе существует возможность заикливания итерационного процесса. Другим недостатком метода является то, что отыскивается единственное решение, в то время как при неупругом деформировании внешней нагрузке может соответствовать несколько состояний системы [4, 10]. Поэтому данный метод может эффективно применяться только для анализа допредельного состояния сечения.

Для отыскания множественных решений в работе [11] рассмотрен ряд методов, из которых наиболее эффективными оказываются эволюционные методы поиска и, в частности, генетические алгоритмы [12]. Они являются, по сути, комбинацией методов перебора и градиентного спуска. При соответствующем построении генетический алгоритм позволяет отыскивать все решения нелинейной задачи.

5. Результаты численного расчета

Расчет железобетонных сечений двумя рассматриваемыми методами реализован авторами статьи в модулях, входящих в состав программного комплекса **STARK ES** («ЕВРОСОФТ», Россия). При расчете сечений по нелинейной деформационной модели в программе использован метод переменных параметров упругости. Численные результаты, приведенные в настоящем разделе, получены с использованием этих программных модулей.

Пример 1. Прямой изгиб элемента таврового сечения моментом M_y (рис. 3).

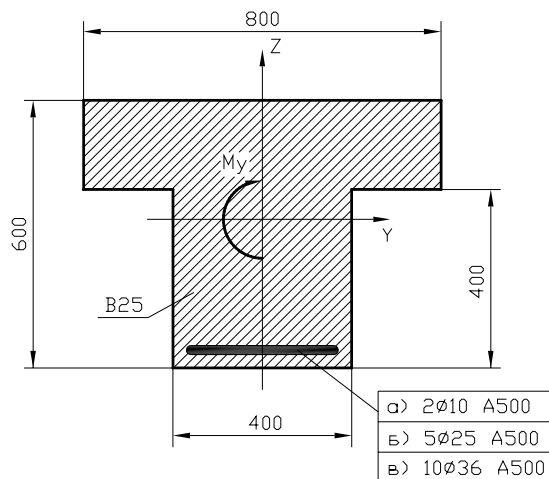
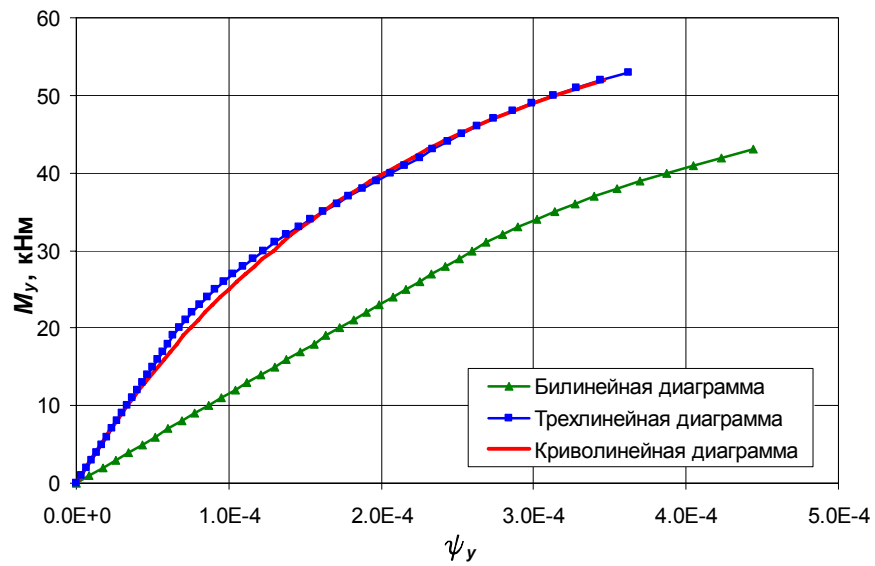


Рис. 4. Сечение 1

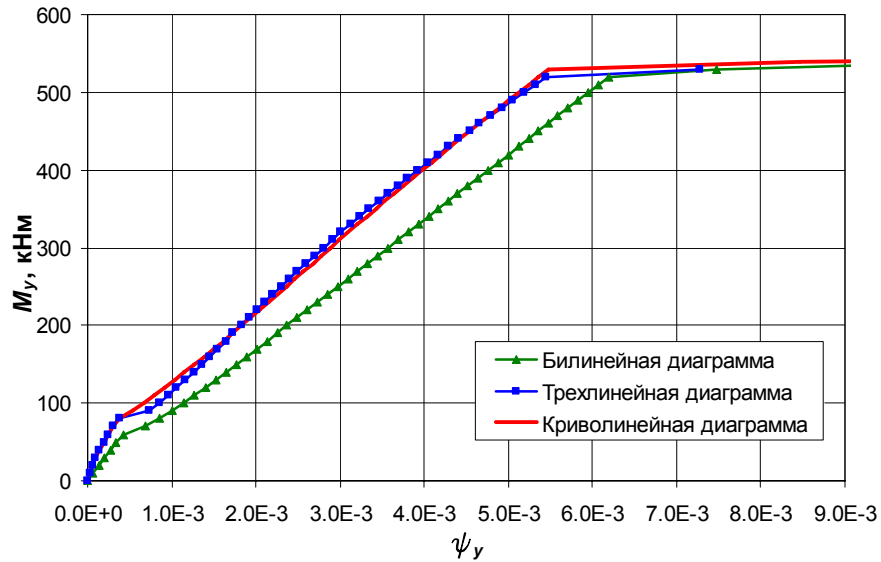
Рассмотрены три варианта армирования сечения продольной арматурой, различающиеся ее количеством: а) 2Ø10 мм А500 (процент армирования $\mu=0.05\%$), б) 5Ø25 мм А500 ($\mu=0.77\%$), в) 10Ø36 мм А500 ($\mu=3.18\%$). Вариант а) соответствует случаю слабо армированного сечения, когда предельная несущая способность сечения достигается в момент образования трещины (согласно нормам, слабо армированные элементы следует рассматривать как бетонные). Вариант б) соответствует случаю нормально армированного сечения, когда разрушение сечения происходит после наступления текучести растянутой арматуры. Вариант в) соответствует случаю переармированного сечения, когда разрушение сечения происходит вследствие раздробления бетона сжатой зоны до наступления текучести растянутой арматуры (случай $\xi > \xi_R$ согласно [5] или [1]).

На рис. 5 представлены графики зависимости изгибающего момента от кривизны изогнутой линии стержня относительно оси Y , полученные расчетом с использованием разных диаграмм деформирования бетона (см. рис. 2). В табл. 1 приведены расчетные значения момента $M_{y,crc}$, при котором происходит образование в элементе первых трещин, и предельного момента $M_{y,ult}$. Результаты получены расчетом как по нелинейной деформационной модели с применением различных диаграмм деформирования бетона (см. рис. 2), так и методом предельных усилий [5].

а) слабо армированное сечения ($\mu = 0.05\%$)



б) нормально армированное сечение ($\mu = 0.77\%$)



в) перearмированное сечение ($\mu = 3.18\%$)

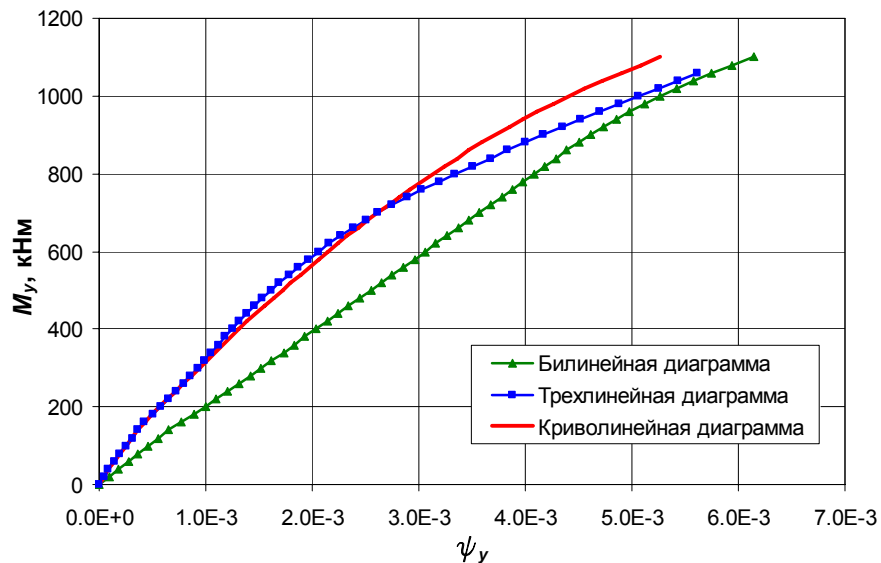


Рис. 5. Вид зависимости $M_y(\psi_y)$ («момент-кривизна»)

Таблица 1

Расчетные значения моментов трещинообразования и предельных моментов для сечения 1

$M_{y,cr},$ кНм			$M_{y,ult},$ кНм			Метод предельных усилий
Общий метод с моделированием работы бетона по						
билинейной диаграмме	трехлинейной диаграмме	криволинейной диаграмме	билинейной диаграмме	трехлинейной диаграмме	криволинейной диаграмме	
Слабо армированное сечение ($\mu = 0.05\%$)						
43	53	53	43	53	53	38
Нормально армированное сечение ($\mu = 0.77\%$)						
68	81	81	546	546	545	549
Переармированное сечение ($\mu = 3.18\%$)						
145	171	170	1259	1278	1258	1270

Из приведенных результатов видно, что:

- метод предельных усилий позволяет достаточно точно определить значения предельного момента в случае нормально армированного или переармированного сечения; в случае слабо армированного сечения предельная величина момента получается заниженной (в данном случае нормами [1, 5] предусмотрено выполнять расчет сечений без учета арматуры, но с учетом работы растянутого бетона);
- применение трехлинейной и криволинейной диаграмм для описания работы бетона приводит к практически одним и тем же результатам;
- применение билинейной диаграммы деформирования бетона приводит к завышенным значениям кривизны (т.е. к занижению изгибной жесткости сечения) и к заниженным величинам моментов трещинообразования во всех случаях, а также предельного момента в случае слабо армированного сечения.

Пример 2. Косой изгиб элемента квадратного сечения моментами M_y и M_z (рис. 6). Сечение является нормально армированным – суммарная площадь сечения продольной арматуры составляет 0.98% от всей площади сечения.

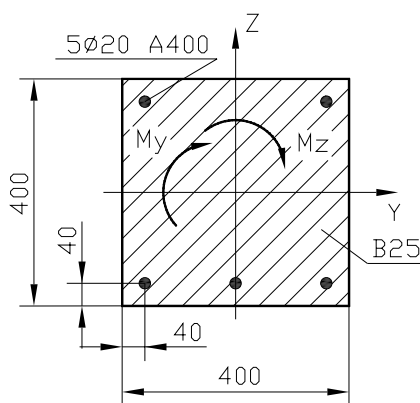


Рис. 6. Сечение 2

В табл. 2 приведены результаты расчета значений моментов $M_{y,cr}$ и $M_{y,ult}$ при варьируемом соотношении M_z/M_y .

Таблица 2

Расчетные значения моментов трещинообразования и предельных моментов для сечения 2

M_z / M_y	$M_{y,crc}$, кНм			$M_{y,ult}$, кНм			Метод предельных усилий
	Общий метод с моделированием работы бетона по						
	билинейной диаграмме	трехлинейной диаграмме	криволинейной диаграмме	билинейной диаграмме	трехлинейной диаграмме	криволинейной диаграмме	
0.0	22.9	27.0	27.0	111.7	111.3	111.3	111.7
0.5	16.0	21.4	20.7	106.1	106.3	106.5	106.5
1.0	11.8	16.4	15.7	83.8	84.1	84.3	84.2
1.5	9.4	12.8	12.3	60.6	60.7	60.7	60.8
2.0	7.8	10.4	10.1	46.5	46.5	46.3	46.6

Результаты расчета показывают, что:

- расчетные значения предельного изгибающего момента в сечении практически совпадают во всех случаях;
- как и в первом примере, расчет по билинейной диаграмме деформирования бетона привел к занижению величин момента трещинообразования.

Пример 3. Внецентренное сжатие элемента асимметричного сечения (рис. 7). Значение сжимающей продольной силы составляет $N=1000$ кН.

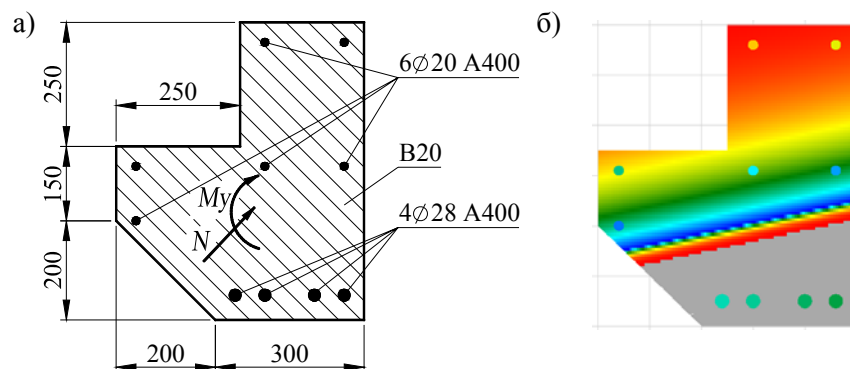


Рис. 7. Сечение 3: а) – параметры сечения, б) – распределение нормальных напряжений (расчет в модуле RCDiagra)

Результаты расчета значений моментов $M_{y,crc}$ и $M_{y,ult}$ приведены в табл. 3.

Таблица 3

Расчетные значения момента трещинообразования и предельного момента для сечения 3

$M_{y,crc}$, кНм			$M_{y,ult}$, кНм			Метод предельных усилий
Общий метод с моделированием работы бетона по						
билинейной диаграмме	трехлинейной диаграмме	криволинейной диаграмме	билинейной диаграмме	трехлинейной диаграмме	криволинейной диаграмме	
161	139	147	380	396	399	368

Из приведенных результатов расчета следует, что:

- расчетные значения предельного изгибающего момента в сечении, определенные разными методами, различаются не более чем на 8.5%;
- расчет по билинейной диаграмме деформирования бетона привел к незначительному (около 10%) занижению величины момента трещинообразования.

7. Выводы

1. Во всех рассмотренных примерах метод предельных усилий, реализованный в программном комплексе STARK ES, показал результаты расчета железобетонных элементов по прочности нормальных сечений, близкие к результатам расчета по нелинейной деформационной модели. Поэтому область применения данного метода для анализа сечений в предельном состоянии и определения количества продольной арматуры из условия прочности сечений может быть более широкой, чем указано в п. 6.2.2 [5].

2. Билинейную диаграмму деформирования бетона [5] рекомендуется применять только при расчете прочности нормальных сечений железобетонных элементов.

3. Трехлинейную диаграмму деформирования бетона [5] рекомендуется применять наравне с криволинейной диаграммой при расчете как прочности, так и жесткости нормальных сечений при любом уровне напряженного состояния сечений.

Литература

1. СНиП 2.03.01-84* Бетонные и железобетонные конструкции. – М.: Госстрой СССР, 1989.
2. СНиП 52-01-2003 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. – М.: ФГУП ЦПП, 2004. – 24 с.
3. Общий случай расчета прочности элементов по нормальным сечениям/ Байков В.Н., Додонов М.И., Расторгуев Б.С. и др.// Бетон и железобетон. – 1987. – №5. – С. 16-18.
4. Алявдин П.В., Симбиркин В.Н. Решение негладких задач расчета элементов железобетонных конструкций // Будаўніцтва. Строительство. Construction. – 2000. – № 1. – С. 11-21.
5. СП 52-101-2003 Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры. – М.: ФГУП ЦПП, 2004. – 53 с.
6. Тур В.В., Кондратчик А.А. Расчет железобетонных конструкций при действии перерезывающих сил. – Брест: БГТУ, 2000. – 400 с.
7. ENV 1992-1-1, Eurocode 2: Design of Concrete Structures. Part 1: General Rules and Rules for Buildings. – Brussels: European Committee for Standardization, 1992.
8. G. Kaklauskas. Integral constitutive model for deformational analysis of flexural reinforced concrete members // STATYBA (Civil Engineering). – Vilnius: Technika, 2001. – Vol. VII, No. 1. – P. 3-9.
9. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 398 с.
10. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
11. Алявдин П.В., Симбиркин В.Н., Касабуцкий С.М. Расчет сечений железобетонных элементов с учетом негладких диаграмм деформирования материалов// Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров РБ: Материалы XI международн. научно-метод. межвуз. семинара, Брест, 25-27 ноября 2004 г.
12. R.L. Haupt, S.E. Haupt. Practical Genetic Algorithms. – New York, Chichester et al.: A Wiley-Interscience Publication, 1998. – 177 p.